Probleme de fizică

Emil Petrescu Viorel Păun

October 5, 2004

Cuprins

Capitolul 1

OSCILAŢII

PROBLEMA 1.1 Cunoscând vitezele v_1 şi v_2 ce corespund elongaţiilor x_1 şi x_2 ale unui oscilator armonic, să se determine amplitudinea şi perioada oscilaţiilor acestuia.

SOLUŢIE

Din expresiile elongaţiei x_1 şi a vitezei v_1

$$x_1 = A\sin(\omega t_1 + \varphi)$$

$$v_1 = \omega A\cos(\omega t_1 + \varphi)$$

rezultă

$$\frac{x_1}{A} = \sin(\omega t_1 + \varphi) \tag{1.1}$$

$$\frac{v_1}{\omega A} = \cos(\omega t_1 + \varphi) \tag{1.2}$$

Prin însumarea pătratelor expresiilor 1.1 şi 1.2 rezultă:

$$\frac{x_1^2}{A^2} + \frac{v_1^2}{\omega^2 A^2} = 1 \tag{1.3}$$

În mod analog, se obţine relaţia dintre elongaţia x_2 şi viteza v_2.

$$\frac{x_2^2}{A^2} + \frac{v_2^2}{\omega^2 A^2} = 1 \tag{1.4}$$

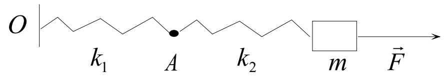

Figura 1.1: Resoarte legate în serie

Din sistemul format din relaţiile 1.3 şi 1.4 rezultă pulsaţia

$$\omega = \sqrt{\frac{v_2^2 - v_1^2}{x_1^2 - x_2^2}}$$

şi amplitudinea

$$A = \sqrt{\frac{x_1^2 v_2^2 - x_2^2 v_1^2}{v_2^2 - v_1^2}}$$

Perioada oscilaţiilor este

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{x_1^2 - x_2^2}{v_2^2 - v_1^2}}$$

PROBLEMA 1.2 O masă m este legată de un punct fix O prin intermediul a două resorturi cu constantele elastice k_1 şi k_2 montate în serie, apoi în paralel. Să se determine în fiecare caz perioada micilor oscilaţii.

SOLUŢIE

a) Cazul resoartelor legate în serie (Fig. 1.1)

Se notează cu x_1 şi x_2 deplasările punctului A şi a masei m din poziţiile lor de echilibru. Aceasta înseamnă că deformarea celui de-al doilea resort este: $x_2 - x_1$.

Ecuaţia de mişcare a masei m este:

$$m\, \ddot{x}_2 = -k\,(x_2 - x_1) \tag{1.5}$$

Deoarece tensiunea în cele două resoarte este egală:

$$k_1 x_1 = k_2\,(x_2 - x_1) \tag{1.6}$$

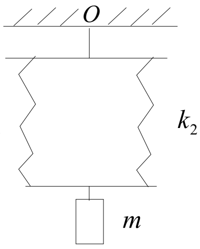

Figura 1.2: Resoarte legate în paralel

Se elimină x_1 din ecuaţiile 1.5 şi 1.6 şi se obţine

$$m\,\ddot{x}_2 + \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x_2 = 0$$

Aceasta este ecuaţia unui oscilator armonic cu pulsaţia

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}$$

În acest caz perioada micilor oscilaţii este:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}$$

b) Cazul resoartelor legate în paralel (Fig. 1.2)

În acest caz deformarea celor două resoarte este egală. Ecuaţia de mişcare a corpului de masă m este

$$m\,\ddot{x} = -\,(k_1 + k_2)\,x$$

iar perioada de oscilaţie

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

PROBLEMA 1.3 Un areometru (densimetru) de masă m cu diametrul tubului cilindric d efectuează mici oscilaţii verticale cu perioada T într-un lichid cu densitatea ρ. Să se determine densitatea lichidului.

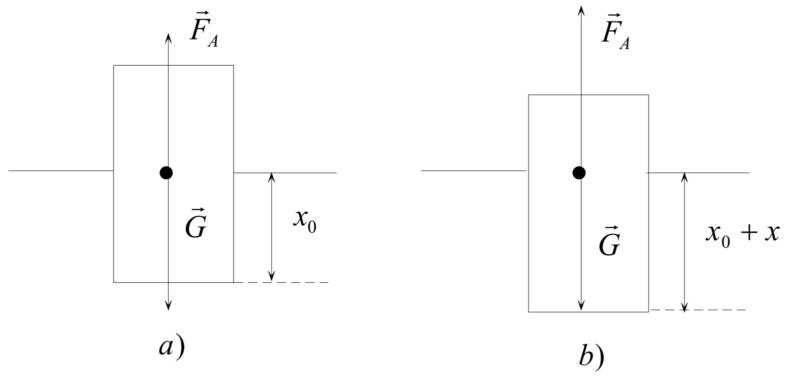

Figura 1.3: Areometru care oscilează în lichid

SOLUŢIE

Asupra areometrului acţionează forţa gravitaţională şi forţa arhimedică. În Fig. 1.3 sunt prezentate două situaţii:

a) areometrul este în echilibru

b) areometrul este scos puţin din poziţia de echilibru.

Când areometrul este în poziţia de echilibru, $F_A = G$, adică

$$\frac{\pi d^2}{4} x_0 \rho g = mg \tag{1.7}$$

unde m este masa areometrului.

Când areometrul este scos din poziţia de echilibru şi este introdus mai adânc în lichid forţa arhimedică este mai mare decât forţa gravitaţională. Rezultanta celor două forţe este:

$$R = F_A - G = \frac{\pi d^2}{4} (x_0 + x) \rho g - mg \tag{1.8}$$

În expresia de mai sus s-a notat cu x deplasarea areometrului faţă de poziţia de echilibru.

Ţinând cont de relaţia 1.7, din 1.8 rezultă

$$R = \frac{\pi d^2}{4} \rho g x = kx \tag{1.9}$$

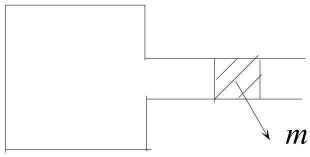

Figura 1.4: Piston care oscilează într-un tub

Deoarece rezultanta forţelor este proporţională cu deplasarea şi este îndreptată în sensul revenirii areometrului în poziţia de echilibru, rezultă

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\pi d^2}{4m}\rho g}$$

şi

$$\rho = \frac{16\pi m}{g d^2 T^2}$$

PROBLEMA 1.4 În cazul recipientului reprezentat în Fig. 1.4 un piston de masă m poate culisa în interiorul tubului cilindric de secţiune S.

Când pistonul este în poziţia de echilibru, volumul aerului din recipient este V, iar presiunea sa este egală cu presiunea atmosferică p_0. Dacă pistonul este scos din poziţia de echilibru el începe să oscileze. Dacă se consideră că interiorul cilindrului este izolat adiabatic, să se determine perioada micilor oscilaţii.

SOLUŢIE

Dacă pistonul este deplasat din poziţia de echilibru cu distanţa Δx volumul aerului din recipient creşte cu:

$$\Delta V = \Delta x S$$

Din ecuaţia transformării adiabatice

$$pV^{\gamma} = \text{const}$$

se obţine

$$V^{\gamma}\Delta p + \gamma V^{\gamma-1} p \Delta V = 0$$

Rezultă astfel variaţia presiunii gazului din interiorul recipientului:

$$\Delta p = -\frac{\gamma p_0}{V}\Delta V$$

Se arată că dacă volumul de gaz din recipient creşte presiunea acestuia scade astfel că forţa rezultantă acţionează din exterior înspre interior, iar dacă volumul de gaz se micşorează, rezultanta acţionează spre exterior. Rezultă că forţa are tendinţa de a readuce pistonul în poziţia de echilibru. Expresia ei este:

$$F = \Delta p S = -\frac{\gamma p_0 S}{V}\Delta V = -\frac{\gamma p_0 S^2}{V}\Delta x$$

Această forţa este de tip elastic astfel că pulsaţia este:

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma p_0 S^2}{Vm}}$$

iar perioada micilor oscilaţii

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{Vm}{\gamma p_0 S^2}}$$

PROBLEMA 1.5 Un punct material m se mişcă fără frecare în interiorul unei cicloide plasate în plan vertical. Ecuaţiile parametrice ale cicloidei sunt:

$$x = R(\theta + \sin\theta) \tag{1.10}$$

$$z = R(1 - \cos\theta) \tag{1.11}$$

Să se calculeze abscisa curbilinie s în funcţie de parametrul θ.

Să se arate că perioada oscilaţiilor în jurul poziţiei de echilibru $x = 0$ şi $z = 0$ este independentă de amplitudinea acestor oscilaţii.

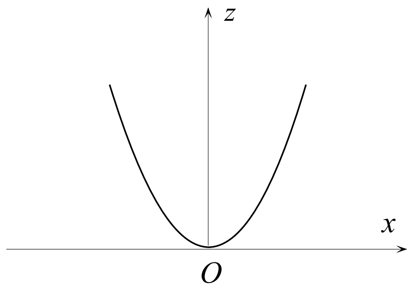

Figura 1.5: Forma unei cicloide în vecinătatea originii

SOLUŢIE

În Fig. 1.5 este arătată forma cicloidei. Punctul $x = 0$ şi $z = 0$ corespunde valorii $\theta = 0$.

Deoarece:

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \tag{1.12}$$

Introducând 1.10 şi 1.11 în 1.12 rezultă:

$$ds = R\sqrt{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}\, d\theta = 2R\cos\frac{\theta}{2}d\theta$$

şi integrând

$$s = 4R\sin\frac{\theta}{2} \tag{1.13}$$

Energia cinetică a punctului material este:

$$E_c = \frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}m\,\dot{s}^2 \tag{1.14}$$

Energia potenţială este de natură gravitaţională şi este dată de expresia:

$$E_p = mgz = mgR\,(1-\cos\theta) = 2mgR\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{mgs^2}{8R} \tag{1.15}$$

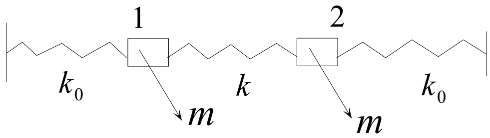

Figura 1.6: Sistem de trei resoarte şi două corpuri care oscileaz

Energia totală este:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + \frac{mg}{8R} s^2 \tag{1.16}$$

Deoarece în sistem nu există forţe neconservative, energia mecanică se conservă. Derivând în raport cu timpul relaţia 1.16 se obţine:

$$\ddot{s} + \frac{g}{4R} s = 0 \tag{1.17}$$

Relaţia 1.17 este ecuaţia unui oscilator armonic cu pulsaţia

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{4R}}$$

Perioada micilor oscilaţiilor este

$$T = 4\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

PROBLEMA 1.6 Se consideră un sistem compus din două corpuri de mase m legate cu ajutorul a 3 resoarte cu constantele de elasticititate k_0 şi k (vezi Fig. 1.6).

La momentul iniţial se aplică un impuls corpului 1 astfel încât viteza acestuia să devină egală cu v_0.

Să se determine ecuaţiile de mişcare ale celor două corpuri.

SOLUŢIE

Poziţiile celor două corpuri vor fi date de deplasările acestora faţă de poziţiile de echilibru: x_1 pentru corpul 1 şi x_2 pentru corpul 2.

Ecuaţiile de mişcare ale celor două corpuri sunt:

$$m\,\ddot{x}_1 = -k_0 x_1 - k\,(x_1 - x_2) \tag{1.18}$$

$$m\,\ddot{x}_2 = -k_0 x_2 - k\,(x_2 - x_1) \tag{1.19}$$

Se adună cele două relaţii

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k_0\,(x_1 + x_2) \tag{1.20}$$

şi se scad cele două relaţii

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -\,(k_0 + 2k)\,(x_1 - x_2) \tag{1.21}$$

Atunci se pot face schimbările de variabile:

$$q_1 = x_1 + x_2 \tag{1.22}$$

$$q_2 = x_1 - x_2 \tag{1.23}$$

Ecuaţiile de mişcare 1.20 şi 1.21 devin:

$$\ddot{q}_1 + \frac{k_0}{m}\,q_1 = 0 \tag{1.24}$$

$$\ddot{q}_2 + \frac{k_0 + 2k}{m}\,q_2 = 0 \tag{1.25}$$

Soluţiile generale ale acestor ecuaţii sunt

$$q_1 = A_1 \sin\,(\omega_1 t + \varphi_1) \qquad ; \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{k_0}{m}} \tag{1.26}$$

$$q_2 = A_2 \sin\,(\omega_2 t + \varphi_2) \qquad ; \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_0 + 2k}{m}} \tag{1.27}$$

Condiţiile iniţiale la momentul t_0

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \qquad ; \qquad \dot{x}_1 = v_0 \\ x_2 &= 0 \qquad ; \qquad \dot{x}_2 = 0 \end{aligned}$$

devin pentru noile variabile:

$$\begin{aligned} q_1 &= 0 \qquad ; \qquad \dot{q}_1 = v_0 \\ q_2 &= 0 \qquad ; \qquad \dot{q}_2 = v_0 \end{aligned}$$

Utilizând condiţiile iniţiale rezultă

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2 = 0 \\ A_1 &= \frac{v_0}{\omega_1} \qquad A_2 = \frac{v_0}{\omega_2} \end{aligned}$$

Astfel relaţiile 1.26 şi 1.27 devin:

$$q_1 = \frac{v_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \tag{1.28}$$

$$q_2 = \frac{v_0}{\omega_2} \sin \omega_2 t \tag{1.29}$$

Ţinând cont de modul de definire a variabilelor q_1 şi q_2, rezultă:

$$x_1 = \frac{v_0}{2} \left[\frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} + \frac{\sin \omega_2 t}{\omega_2} \right]$$

$$x_2 = \frac{v_0}{2} \left[\frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} - \frac{\sin \omega_2 t}{\omega_2} \right]$$

PROBLEMA 1.7 Un punct material de masă m şi sarcină q se află într-un plan xOy sub acţiunea unei forţe $\vec{F} = -k\vec{r}$, unde $\vec{r}$ este raza vectoare a punctului material. Dacă în această regiune există un câmp magnetic $\vec{B}$ perpendicular pe planul xOy să se calculeze pulsaţia mişcării oscilatoarii. Se va considera cazul unui câmp magnetic slab.

SOLUŢIE

În acest caz legea a doua a dinamicii este:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -k\vec{r} + q\vec{v} \times \vec{B} \tag{1.30}$$

În planul xOy se obţine:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{qB}{m}\dot{y} \tag{1.31}$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}y = -\frac{qB}{m}\dot{x} \tag{1.32}$$

Se fac următoarele notaţii: $\omega_0^2 = k/m$ şi $\omega_l = qB/2m$.
Se înmulţeşte ecuaţia 1.32 cu i şi se adună cu 1.31. Rezultă:

$$\left(\ddot{x} + i\,\ddot{y}\right) + \omega_0^2(x + iy) = -i2\omega_l\left(\dot{x} + i\dot{y}\right) \tag{1.33}$$

Introducând o nouă variabilă:

$$u = x + iy$$

ecuaţia 1.33 devine

$$\ddot{u} + 2i\,\dot{u}\,\omega_l + \omega_0^2 u = 0 \tag{1.34}$$

Relaţia 1.34 este o ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea cu coeficienţi constanţi a cărei ecuaţie caracteristică este:

$$r^2 + 2i\omega_l r + \omega_0^2 = 0$$

şi are soluţiile

$$r_{1,2} = -i\omega_l \pm i\sqrt{\omega_l^2 + \omega_0^2}$$

În cazul câmpurilor magnetice slabe B este mic astfel încât se poate considera că

$$\omega_l \ll \omega_0$$

Atunci soluţiile ecuaţiei caracteristice pot fi puse sub forma mai simplă:

$$r_{1,2} = -i\left(\omega_l \pm \omega_0\right)$$

iar soluţia ecuaţiei 1.34 este

$$u = e^{-i\omega_l}\left[Ae^{i\omega_0 t} + Ce^{-i\omega_0 t}\right]$$

A şi C sunt constante care se determină din condiţiile iniţiale.

Se constată că în câmp magnetic pulsaţia ω_0 se schimbă cu o valoare ω_l astfel încât:

$$\omega = \omega_0 \pm \omega_l$$

PROBLEMA 1.8 Asupra unei sfere de rază r care se deplasează cu o viteza v într-un fluid cu coeficientul de vâscozitate η acţionează o forţă de frecare care are expresia:

$$\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v}$$

O sferă de masă m este suspendată de un resort cu constanta elastică k. Perioada de oscilaţie în aer, unde frecarea este neglijabilă, este T_0. Când sfera este introdusă într-un fluid perioada oscilaţiilor devine $T < T_0$. Să se determine coeficientul de vâscozitate în funcţie de T şi T_0.

SOLUŢIE

Legea a doua a lui Newton pentru sfera care oscilează în fluid este

$$m\ddot{x} = -kx - 6\pi\eta r\,\dot{x} \tag{1.35}$$

Notând $\lambda = 3\pi\eta r$, ecuaţia 1.35 devine:

$$m\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + kx = 0 \tag{1.36}$$

Ecuaţia caracteristică a ecuaţiei diferenţiale 1.36 este

$$mr^2 + 2\lambda r + k = 0$$

şi are soluţiile

$$r_{1,2} = -\frac{\lambda}{m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\lambda^2}{m^2}} \tag{1.37}$$

În cazul în care $k/m \leq \lambda^2/m^2$ mişcarea este aperiodică. Deoarece se consideră că sfera efectuează oscilaţii în fluid se va considera cazul $k/m > \lambda^2/m^2$. Soluţia ecuaţiei 1.36 este:

$$x = Ae^{-\lambda t/m} \exp i\,(\omega t + \phi) \tag{1.38}$$

unde:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\lambda^2}{m^2}} \tag{1.39}$$

În cazul în care sfera oscilează în aer, forţa de frecare este neglijabilă. Atunci se poate considera $\lambda = 0$ iar pulsaţia oscilaţiilor este

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.40}$$

Din 1.39 şi 1.40 rezultă:

$$\lambda = m\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Deoarece $\lambda = 3\pi\eta r$, $\omega_0 = 2\pi/T_0$ şi $\omega = 2\pi/T$

$$\eta = \frac{2m}{3r}\sqrt{\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T^2}}$$

PROBLEMA 1.9 O particulă este legată de un resort cu constanta elastică k. Ea poate executa oscilaţii fără amortizare. La momentul iniţial particula se află în poziţia de echilibru. Asupra particulei acţionează o forţă F un timp egal cu τ secunde. Să se determine amplitudinea oscilaţiilor după ce forţa încetează.

SOLUŢIE

Ecuaţia de mişcare în intervalul de timp $[0, \tau]$ este

$$m\,\ddot{x} = -kx + F \tag{1.41}$$

cu condiţiile iniţiale

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ \dot{x}(0) &= 0 \end{aligned} \tag{1.42}$$

Soluţia ecuaţiei de mai sus este de forma

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{F}{k} \tag{1.43}$$

unde: $\omega = \sqrt{k/m}$

Pentru determinarea constantelor A şi φ se ţine cont de condiţiile iniţiale. Rezultă

$$x = (1 - \cos\omega t)\frac{F}{k} \tag{1.44}$$

Ecuaţia de mişcare pentru $t > \tau$ este

$$m\ddot{x} = -kx \tag{1.45}$$

Soluţia ecuaţiei 1.45 este:

$$x = A'\cos[\omega(t - \tau) + \alpha] \tag{1.46}$$

Pentru determinarea amplitudinii A' se pune condiţia de continuitate pentru elongaţie şi viteză în momentul $t = \tau$

Se obţine

$$(1 - \cos\omega\tau)\frac{F}{k} = A'\cos\alpha$$

$$\frac{F}{k}\sin\omega\tau = -A'\sin\alpha$$

Cele două relaţii se ridică la pătrat şi se adună. Rezultă

$$A' = \frac{2F}{m}\sin\frac{\omega\tau}{2}$$

PROBLEMA 1.10 O masă m legată de un resort oscilează , decrementul logaritmic al amortizării fiind δ. După timpul t_1, energia oscilatorului scade de n ori. Să se determine constanta de elasticitate a resortului.

SOLUŢIE

Deoarece energia unui oscilator este proporţională cu pătatrul amplitudinii oscilaţiei raportul energiilor oscilatorului corespunzătoare momentelor t_0 şi t_1 este:

$$\frac{E_1}{E_0} = \left(\frac{A_1}{A_0}\right)^2 = \frac{1}{n} \tag{1.47}$$

Notând cu γ coeficientul de amortizare:

$$\frac{A_1}{A_0} = \exp\left(-\gamma t_1\right) \tag{1.48}$$

Din relaţiile 1.47 şi 1.48 rezultă:

$$\ln\sqrt{n} = \gamma t_1$$

şi decrementul logaritmic este:

$$\delta = \gamma T = \frac{\ln\sqrt{n}}{t_1} T \tag{1.49}$$

Cum

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 = \frac{k}{m} - \gamma^2$$

$$k = m\left(\omega^2 + \gamma^2\right) = m\left(\frac{4\pi^2}{T^2} + \gamma^2\right) \tag{1.50}$$

Dacă se ţine cont de relaţia 1.49 din relaţia 1.50 se obţine constanta de elasticitate a resortului:

$$k = \left[\left(\frac{2\pi\ln\sqrt{n}}{\delta t_1}\right)^2 + \gamma^2\right]$$

PROBLEMA 1.11 Un corp de masă m este suspendat de un resort cu constanta de elasticitate k. Forţa de atracţie este proporţională cu viteza. Dupa s oscilaţii amplitudinea scade de n ori. Să se determine perioada de oscilaţie şi decrementul logaritmic δ.

SOLUŢIE

Mişcarea corpului este o mişcare amortizată. Ea are loc după legea

$$x = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) \tag{1.51}$$

unde:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \tag{1.52}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.53}$$

Amplitudinea în timpul mişcării oscilatorii scade exponenţial în timp:

$$A = A_0 e^{-\gamma t}$$

Conform datelor problemei:

$$\frac{A_0}{n} = A_0 e^{-\gamma s T} \tag{1.54}$$

Rezultă:

$$\ln n = \gamma s T \tag{1.55}$$

Din relaţiile 1.52 şi din 1.55 se obţine:

$$\gamma = \frac{\omega_0 \ln n}{\sqrt{4\pi^2 s^2 + \ln^2 n}}$$

$$T = \frac{\ln n}{\gamma s} = \frac{\sqrt{4\pi^2 s^2 + \ln^2 n}}{s\omega_0}$$

Decrementul logaritmic este

$$\delta = \gamma T = \frac{\ln n}{s}$$

PROBLEMA 1.12 Un corp de masă m=5 kg este suspendat de un resort care oscilează. În absenţa forţelor de rezistenţă perioada de oscilaţie este $T_0 = 0,4\pi$ s. Atunci când există o forţă de rezistenţă proporţională cu viteza, perioada de oscilaţie devine $T = 0,5\pi$ s. Să se determine ecuaţia de mişcare a corpului presupunând că în momentul iniţial acesta se găseşte la distanţa $x_0 = 4$ cm faţă de poziţia de echilibru şi apoi este lăsat liber.

SOLUŢIE

Mişcarea corpului este o mişcare cvasiperiodică amortizată cu pulsaţia ω şi perioada T date de relaţiile:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{4\pi^2}{T_0^2} - \gamma^2$$

Rezultă că:

$$\gamma = 2\pi\sqrt{\frac{T^2 - T_0^2}{T^2 T_0^2}} = \frac{2\pi}{T_0 T}\sqrt{T^2 - T_0^2} = 3 \ \ \mathrm{s}^{-1}$$

Deoarece ecuaţia de mişcare a corpului este de forma:

$$x = A_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi) \tag{1.56}$$

viteza sa este:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A_0 \gamma e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi) + \omega A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) \tag{1.57}$$

Aplicând condiţiile iniţiale

$$x(0) = x_0 \qquad v(0) = 0$$

se obţine:

$$0 = -A_0 \gamma \sin\phi + A_0 \omega \cos\phi \tag{1.58}$$

$$x_0 = A_0 \sin\phi \tag{1.59}$$

Din relaţiile 1.58 şi 1.59 rezultă $A_0 = 5$ cm şi

$$\phi = \arcsin\frac{x_0}{A_0} = \arcsin\frac{4}{5}$$

Ecuaţia de mişcare este:

$$x = 5e^{-3t} \sin(4t + \arcsin 4/5) \quad \mathrm{cm}$$

PROBLEMA 1.13 Să se scrie ecuaţia de mişcare a unui punct material de masă m care este supus acţiunii unei forţe elastice kx şi unei forţe constante F_0 având aceiaşi direcţie ca forţa elastică. Se consideră că la momentul $t = 0$ în punctul $x = 0$ viteza este nulă.

SOLUŢIE

Legea a doua a mecanicii este:

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \tag{1.60}$$

Soluţia acestei ecuaţii diferenţiale neomogene este suma dintre soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale omogene

$$x_1 = A\sin(\omega t + \phi_0) \qquad \text{cu} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.61}$$

şi o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene

$$x_2 = \frac{F_0}{k} \tag{1.62}$$

Atunci soluţia ecuaţiei 1.60 este:

$$x = x_1 + x_2 = \frac{F_0}{k} + A\sin(\omega t + \phi_0) \tag{1.63}$$

Viteza punctului material este

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \phi_0) \tag{1.64}$$

Din condiţiile iniţiale

$$x(0) = 0 \qquad \text{şi} \qquad v(0) = 0$$

şi din ecuaţiile 1.63 şi 1.64 se obţine:

$$A = -\frac{F_0}{k} \qquad \text{şi} \qquad \phi_0 = \frac{\pi}{2}$$

iar ecuaţia de mişcare este:

$$x = -\frac{F_0}{k}(1 - \cos\omega t)$$

PROBLEMA 1.14 Să se scrie ecuaţia de mişcare unidimensională a unui punct material de masă m care este supus acţiunii unei forţe elastice $-kx$ şi unei forţe $F = at$ care are aceiaşi direcţie ca şi forţa elastică. La momentul $t = 0$ în punctul $x = 0$ viteza este nulă.

SOLUŢIE

Legea a doua a mecanicii se scrie:

$$m\ddot{x} + kx = at \tag{1.65}$$

Soluţia acestei ecuaţii diferenţiale neomogene este suma dintre soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale omogene

$$x_1 = A\sin(\omega t + \varphi) \qquad \text{cu} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.66}$$

şi o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene

$$x_2 = \frac{at}{k} \tag{1.67}$$

Atunci soluţia ecuaţiei 1.65 este:

$$x = x_1 + x_2 = \frac{at}{k} + A\sin(\omega t + \varphi) \tag{1.68}$$

Viteza punctului material este

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{a}{k} + A\omega\cos(\omega t + \varphi) \tag{1.69}$$

Din condiţiile iniţiale

$$x(0) = 0 \qquad \text{şi} \qquad v(0) = 0$$

şi din ecuaţiile 1.68 şi 1.69 se obţine:

$$A\sin\varphi = 0 \tag{1.70}$$

$$\frac{a}{k} + A\omega\cos\varphi = 0 \tag{1.71}$$

Din 1.70 şi din 1.71 rezultă:

$$\varphi = 0 \qquad A = -\frac{a}{k\omega}$$

Ecuaţia de mişcare 1.68 devine:

$$x = \frac{a}{k}\left(t - \frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)$$

PROBLEMA 1.15 Să se scrie ecuaţia de mişcare unidimesională a unui punct material de masă m care este supus acţiunii unei forţe elastice $-kx$ şi unei forţe $F = F_0 \exp(-\alpha t)$. La momentul $t = 0$ în punctul $x = 0$ viteza este nulă.

SOLUŢIE

Legea a doua a mecanicii se scrie:

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \exp(-\alpha t) \tag{1.72}$$

Soluţia acestei ecuaţii diferenţiale neomogene este suma dintre soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale omogene

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi) \qquad \text{cu} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.73}$$

şi o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene de forma:

$$x_2 = A_2 \exp(-\alpha t) \tag{1.74}$$

Pentru a determina valoarea constantei A_2 introducem 1.74 în 1.72. Se obţine:

$$m\alpha^2 A_2 \exp(-\alpha t) + kA_2 \exp(-\alpha t) = F_0 \exp(-\alpha t)$$

Rezultă:

$$A_2 = \frac{F_0}{m\alpha^2 + k} \tag{1.75}$$

Atunci soluţia generală a ecuaţiei 1.72 este:

$$x = x_1 + x_2 = \frac{F_0}{m\alpha^2 + k} \exp\left(-\alpha t\right) + A_1 \sin\left(\omega t + \varphi\right) \tag{1.76}$$

Viteza punctului material este

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{-\alpha F_0}{m\alpha^2 + k} \exp\left(-\alpha t\right) + A_1 \omega \cos\left(\omega t + \varphi\right) \tag{1.77}$$

Din condiţiile iniţiale

$$x(0) = 0 \qquad \text{şi} \qquad v(0) = 0$$

şi din ecuaţiile 1.76 şi 1.77 se obţine:

$$\frac{F_0}{m\alpha^2 + k} + A_1 \sin\varphi = 0 \tag{1.78}$$

$$\frac{-\alpha F_0}{m\alpha^2 + k} + A_1 \omega \cos\varphi = 0 \tag{1.79}$$

Din 1.78 şi din 1.79 se obţine:

$$A_1 = \frac{F_0}{m\alpha^2 + k}\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\omega^2}}$$

şi, prin împărţirea acestora, unghiul φ:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\omega}{\alpha}$$

PROBLEMA 1.16 O sursă aflată într-un mediu elastic unidimensional oscilează dupa legea

$$y = 0,5 \sin 100\pi t \quad \text{mm}$$

Lungimea de undă a undelor longitudinale emise este $\lambda = 20$ m.

a) După cât timp va începe să oscileze un punct aflat la distanţa $x_1 = 8$ m faţă de sursă?

b) Ce defazaj există între oscilaţia punctului aflat la distanţa x_1 de sursă şi oscilaţia sursei?

c) La ce distanţă se află două puncte ale căror oscilaţii sunt defazate cu $\pi/3$?

SOLUŢIE

a) Din ecuaţia de oscilaţie a sursei rezultă că $\omega = 100\pi$ astfel că:

$$T = \frac{2\pi}{100\pi} = 2 \times 10^{-2} \ \text{s}$$

Deoarece lungimea de undă este $\lambda = vT$, viteza de propagare a undei este:

$$v = \frac{\lambda}{T} = 10^3 \ \text{m/s}$$

Timpul după care punctul aflat la distanţa x_1 începe să oscileze este:

$$t = \frac{x_1}{v} = \frac{8}{10^3} = 8 \times 10^{-3} \ \text{s}$$

b) Ecuaţia undei este:

$$y_1 = 0,5 \sin 100\pi \left(t - \frac{x_1}{v} \right) \ \text{mm}$$

Defazajul dintre oscilaţia sursei şi oscilaţia punctului considerat este:

$$\Delta\varphi = \varphi_s - \varphi_p = 100\pi t - 100\pi \left(t - \frac{x_1}{v} \right) = 100\pi \frac{x_1}{v} = \frac{8\pi}{10} \ \text{rad}$$

c) Se consideră defazajul dintre două puncte aflate la distanţa Δx unul de altul

$$\Delta\varphi = 100\pi \left(t - \frac{x_2}{v} \right) - 100\pi \left(t - \frac{x_1}{v} \right) = \frac{100\pi \left(x_1 - x_2 \right)}{v}$$

Atunci:

$$\Delta x = (x_1 - x_2) = \frac{v\Delta\varphi}{100\pi} = 3,3 \ \text{m}$$

PROBLEMA 1.17 Un avion cu reacţie zboară cu viteza constantă $v = 1000$ m/s la înălţimea $h = 10,2$ km. Care este forma frontului undei de şoc produsă de avion? La ce distanţă de o casă se va afla avionul când geamurile acesteia încep să vibreze? Viteza sunetului este $c = 340$ m/s.

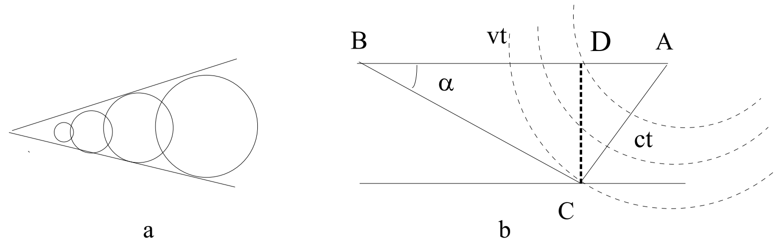

Figura 1.7: Unda de şoc produsă de un avion

SOLUŢIE

Dacă un corp (glonţ, avion supersonic) se deplasează într-un fluid cu o viteză mai mare decât a undelor sonore apare aşa numita undă de şoc. Undele produse de avion se propagă în toate direcţiile sub formă de unde sferice. Deoarece viteza v a avionului este mai mare decât a sunetului, frontul de undă are forma unui con în vârful căruia se află avionul în fiecare moment (Fig. 1.7).

Dacă la un moment dat avionul se afla în punctul A după trecerea timpului t, el s-a deplasat în punctul B iar AB= vt. Frontul undei emise în A va avea raza AC = ct. În punctul C se presupune că se află casa unde este simţită unda de soc. Se observă în Fig.1.7 că:

$$\sin\alpha = \frac{ct}{vt} = \frac{c}{v}$$

Distanţa BC faţa de o casă aflată în punctul C de pe sol este:

$$d = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{hv}{c} = 30 \text{ km}$$

PROBLEMA 1.18 O sursă punctiformă emite unde sonore cu frecvenţa ν. Să se găsească frecvenţele sunetului pe care-l recepţionează un observator care se apropie de sursă cu viteza v. Să se găsească frecvenţa sunetului pe care acelaşi observator îl recepţioneaza dacă se depărtează de sursă cu viteza v. Viteza sunetului în aer este c.

SOLUŢIE

Sursa fiind punctiformă undele emise de aceasta sunt sferice. Suprafeţele de undă sunt sfere concentrice distanţate una de alta cu lungimea de undă. Dacă observatorul ar fi în repaus el ar recepţiona ct/λ unde în timpul t. Dacă observatorul se apropie de sursă el va recepţiona $(c+v)\,t/\lambda$ unde în timpul t. Frecvenţa cu care observatorul recepţionează undele este

$$\nu\,' = \frac{(c+v)t}{\lambda t} = \frac{c+v}{\lambda} = \frac{(c+v)}{cT} = \nu\left(1+\frac{v}{c}\right)$$

Dacă observatorul se depărtează de sursă cu viteza v el va recepţiona $(c-v)\,t/\lambda$ unde în timpul t. Frecvenţa receptionată de observator va fi:

$$\nu\,' = \frac{(c-v)t}{\lambda t} = \frac{c-v}{\lambda} = \frac{(c-v)}{cT} = \nu\left(1-\frac{v}{c}\right)$$

Putem astfel să exprimăm frecvenţa receptionată de observatorul care se apropie sau se depărtează de sursă astfel:

$$\nu\,' = \nu\left(1\pm\frac{v}{c}\right)$$

unde semnul + corespunde cazului când observatorul se apropie de sursă iar semnul − corespunde cazului când observatorul se depărtează de sursă. Acesta este efectul Doppler.

PROBLEMA 1.19 O sursă punctiformă emite unde sonore cu frecvenţa ν. Să se găsească frecvenţele sunetului pe care-l recepţionează un observator în cazul în care sursa se apropie de observator cu viteza v. Să se găsească frecvenţa sunetului pe care acelaşi observator îl recepţionează dacă sursă se depărtează de observator cu viteza v. Viteza sunetului în aer este c.

SOLUŢIE

Deoarece viteza de propagare a sunetului depinde numai de proprietăţile mediului, în timpul unei oscilaţii unda se va propaga înainte cu distanţa λ. Dar în timpul unei perioade şi sursa se deplasează în sensul de deplasare al undei cu vT, unde T este perioada. Atunci lungimea de undă va fi:

$$\lambda' = \lambda - vT = cT - vT = (c - v)\,T$$

Frecvenţa percepută de observator va fi:

$$\nu' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{c - v}\,\nu$$

Dacă sursa se depărtează de observator cu viteza v lungimea de undă va fi:

$$\lambda' = \lambda + vT = cT + vT = (c + v)\,T$$

Frecvenţa percepută de observator va fi:

$$\nu' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{c + v}\,\nu$$

Astfel în cazul în care sursa se apropie sau se depărtează de observator frecvenţa percepută de acesta este:

$$\nu' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{c \pm v}\,\nu$$

unde semnul + corespunde cazului în care sursa se apropie de observator iar semnul − corespunde cazului în care sursa se depărtează de observator.

PROBLEMA 1.20 Să se rezolve ecuaţia undelor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

pentru o coardă de lungime $l = 1$ care iniţial este în repaus şi prezintă proprietăţile:

$$u\,(x, 0) = \begin{cases} x/5 & \text{dacă} \quad 0 \le x \le 1/2 \\ (1 - x)\,/5 & \text{dacă} \quad 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$$

SOLUŢIE

Soluţia generală a ecuaţiei undelor este o suprapunere de forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\pi vt + B_n \sin n\pi vt) \sin n\pi x \tag{1.80}$$

deoarece $l = 1$. Având în vedere că

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi v \left(A_n \sin n\pi vt - B_n \cos n\pi vt\right)_{t=0} \sin n\pi x = 0$$

coeficienţii B_n sunt nuli.

Atunci relaţia 1.80 devine:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\pi vt \sin n\pi x \tag{1.81}$$

La momentul $t = 0$ din 1.81 se obţine:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi x$$

Coeficienţii A_n se calculează cu formulele:

$$A_n = 2\int_0^1 u(x,0) \sin n\pi x dx \tag{1.82}$$

Ţinând seama de proprietăţile funcţiei $u(x,0)$ 1.82 devine:

$$A_n = \frac{2}{5}\int_0^{1/2} x \sin n\pi x dx + \frac{2}{5}\int_{1/2}^{1} (1-x) \sin n\pi x dx$$

Se efectuează substituţia:

$$n\pi x = \xi \qquad x = \frac{\xi}{n\pi} \qquad dx = \frac{d\xi}{n\pi}$$

Atunci:

$$A_n = \frac{2}{5}\int_0^{n\pi/2} \frac{\xi}{n\pi} \sin \xi \frac{d\xi}{n\pi} + \frac{2}{5}\int_{n\pi/2}^{n\pi} \left(1 - \frac{\xi}{n\pi}\right) \sin \xi \frac{d\xi}{n\pi}$$

$$A_n = \frac{2}{5\left(n\pi\right)^2}\left[\int_0^{n\pi/2}\xi\sin\xi d\xi + n\pi\int_{n\pi/2}^{n\pi}\sin\xi d\xi - \int_{n\pi/2}^{n\pi}\xi\sin\xi d\xi\right]$$

Dar

$$\int \xi\sin\xi d\xi = \sin\xi - \xi\cos\xi$$

şi

$$\int \sin\xi d\xi = -\cos\xi$$

Atunci:

$$A_n = \frac{2}{5\left(n\pi\right)^2}\left[\left(\sin\xi - \xi\cos\xi\right)\Big|_0^{n\pi/2} - n\pi\cos\xi\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} - \left(\sin\xi - \xi\cos\xi\right)\Big|_{n\pi/2}^{n\pi}\right]$$

şi

$$A_n = \frac{4}{5\left(n\pi\right)^2}\sin\frac{n\pi}{2} \tag{1.83}$$

Soluţia ecuaţiei este:

$$u\left(x,t\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{5\left(n\pi\right)^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin n\pi x\cos n\pi vt$$

PROBLEMA 1.21 Să se găsească unda rezultantă obţinută prin suprapunerea a două unde care au aceiaşi amplitudine dar a căror lungime de undă şi pulsaţie diferă puţin.

$$u_1\left(x,t\right) = A\sin\frac{2\pi}{\lambda_1}\left(x - v_1 t\right)$$

$$u_2\left(x,t\right) = A\sin\frac{2\pi}{\lambda_2}\left(x - v_2 t\right)$$

SOLUŢIE

Deoarece

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \text{şi} \qquad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi v}{\lambda}$$

$$u = u_1 + u_2 = 2A\sin\frac{k_1 x - \omega_1 t + k_2 x - \omega_2 t}{2}\cos\frac{k_1 x - \omega_1 t - k_2 x + \omega_2 t}{2}$$

$$u = 2A\sin\left[\frac{k_1+k_2}{2}x - \frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right]\cos\left[\frac{k_1-k_2}{2}x - \frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right]$$

În relaţia de mai sus vom introduce notaţiile:

$$k_1 = k + dk \qquad k_2 = k - dk$$

$$\omega_1 = \omega + d\omega \qquad \omega_2 = \omega - d\omega$$

Atunci:

$$u = 2A\cos\left(xdk - td\omega\right)\sin\left(kx - \omega t\right)$$

Termenul

$$2A\cos\left(xdk - td\omega\right)$$

reprezintă amplitudinea undei progresive iar factorul de fază este:

$$\sin\left(kx - \omega t\right) = \sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(x - \frac{\omega}{k}t\right)$$

PROBLEMA 1.22 Să se găsească legătura dintre viteza de fază şi viteza de grup.

SOLUŢIE

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\left(v_f k\right)}{dk} = v_f + k\frac{dv_f}{dk}$$

Dar

$$k\frac{dv_f}{dk} = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{dv_f}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dk}\right) = \frac{2\pi}{\lambda}\left(-\frac{2\pi}{k^2}\right)\frac{dv_f}{d\lambda}$$

$$k\frac{dv_f}{dk} = -\frac{4\pi^2}{\lambda}\frac{\lambda^2}{4\pi^2}\frac{dv_f}{d\lambda} = -\lambda\frac{dv_f}{d\lambda}$$

Atunci:

$$v_g = v_f - \lambda\frac{dv_f}{d\lambda}$$

Mărimea $dv_f/d\lambda$ măsoară dispersia cauzată de mediu. Dacă nu există dispersie, energia va fi transportată cu viteza de fază iar $v_f = v_g$.

PROBLEMA 1.23 Să se reducă ecuaţia undelor neomogene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + v\left(x\right)$$

la trei ecuaţii diferenţiale.

SOLUŢIE

Dacă se încearcă substituţia

$$u = X\left(x\right)T\left(t\right)$$

se obţine:

$$T\frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{X}{v^2}\frac{d^2 T}{dt^2} + v$$

Se observă că variabilele nu pot fi separate.
Se alege următoarea substituţie:

$$u = X\left(x\right)T\left(t\right) + \gamma\left(x\right)$$

Atunci:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = T\frac{dX}{dx} + \frac{d\gamma}{dx}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = T\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{d^2\gamma}{dx^2}$$

şi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X\frac{d^2 T}{dt^2}$$

Atunci

$$T\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{d^2\gamma}{dx^2} = \frac{X}{v^2}\frac{d^2 T}{dt^2} + v\left(x\right) \tag{1.84}$$

Se alege funcţia γ astfel:

$$\frac{d^2\gamma}{dx^2} = v\left(x\right) \tag{1.85}$$

Atunci 1.84 devine:

$$T\frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{X}{v^2}\frac{d^2 T}{dt^2}$$

Această ecuaţie se mai poate scrie:

$$\frac{v^2}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2}$$

Admiţând soluţii periodice se poate face o separare de variabile astfel încât:

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 X = 0$$
$$\frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2 T = 0$$

Se obţin astfel două ecuaţii diferenţiale la care se mai poate adăuga şi ecuaţia 1.85.

Bibliografie

[1] V. V. Batygin, I. N. Toptygin – *Problems in Electrodynamics* , Academic Press, London and New York, 1964

[2] Cornelia Motoc – *Fizică* , Editura All. Bucureşti 1994

[3] Ion M. Popescu – *Fizică* , Editura didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982

[4] Ion M. Popescu, Gabriela Cone, Gheorghe Stanciu – *Probleme rezolvate de fizică* , Editura didactică şi Pedagocgică, Bucureşti, 1993

[5] H. Goldstein – *Classical Mechanics* , Addison - Wesley Publishing Co. Mass. 1980

[6] G. L .Kotkin, V. G. Serbo – *Collection of Problems in Classical Mechanics* , Pergamon Press, 1971

[7] L. D. Landau, E. M. Lifsitz – *Fizică statistică* , Editura Tehnică, Bucureşti 1998

[8] Ryogo Kubo – *Thermodynamics* , North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1968

[9] Ryogo Kubo – *Statistical Mechanics* , North Holland Publising Company, Amsterdam, 1965